МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. С.Ю.ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Кафедра ***математических и естественно-научных дисциплин***

Рейтинговая работа *контрольная работа*

(домашняя творческая работа, расчетно-аналитическое задание, реферат, контрольная работа)

по дисциплине *Математика*

Задание/вариант № 8

Выполнена обучающимся группы *о.УЗДт 28.2/Б1-21*

Иванов Иван Иванович

(фамилия, имя, отчество)

Преподаватель

Сурина Елена Евгеньевна

(фамилия, имя, отчество)

Москва – 2021 г.

Содержание

Рейтинговая контрольная работа

Вариант № 8

Задание 1) Даны матрицы A, B, C и число q. Найти матрицу $D = AB + qC$.

8). $q = 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -6 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем матрицу $D = AB + 2C$.

Сначала найдем произведение матриц *AB*.
Используем правило:

Произведением двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, элемент которой, находящийся на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие (по порядку) элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

Произведение двух матриц AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B .

У нас нужно найти произведение матрицы размером 3×2 и 2×3, т.е. произведение найти возможно:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot4-2\cdot7 & -1\cdot6-2\cdot5 & -1\cdot3-2\cdot1 \\ 6\cdot4-5\cdot7 & 6\cdot6-5\cdot5 & 6\cdot3-5\cdot1 \\ 6\cdot4-3\cdot7 & 6\cdot6-3\cdot5 & 6\cdot3-3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -16 & -5 \\ -11 & 11 & 13 \\ 3 & 21 & 15 \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы на число является матрица, элементы которой равняются произведениям элементов матрицы и числа, то есть:

$$qC = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -6 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 2 \\ -12 & 14 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Суммой (разностью) матриц одинакового размера $m¿\ n$ является матрица размера $m¿\ n$, элементы которой равняются алгебраической сумме (разности) соответствующих элементов данных матриц:

$$D = AB + 2C = \begin{pmatrix} -18 & -16 & -5 \\ -11 & 11 & 13 \\ 3 & 21 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -10 & 2 \\ -12 & 14 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -26 & -3 \\ -23 & 25 & 9 \\ -1 & 29 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $D = \begin{pmatrix} -10 & -26 & -3 \\ -23 & 25 & 9 \\ -1 & 29 & 13 \end{pmatrix}.$

Задание 2) Дана система линейных алгебраических уравнений
Найти решение этой системы любым методом.

8). $\begin{cases} -5x - 4y + 6z ¿ 3, \\ -8x - 3y + 5z ¿ 7, \\ 6x + 2y - 3z ¿ -5. \end{cases}$

Решение:

Запишем систему в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -8 & -3 & 5 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Решаем эту систему линейных уравнений методом Крамера.

Формулы Крамера: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z = \frac{\Delta_3}{\Delta};$ где $\Delta = \det A$ - определитель матрицы системы, $\Delta_k -$ это вспомогательный определитель, который получаем из основного определителя Δ путем замены его k-го столбца на столбец свободных членов системы. Вычислим все эти определители с помощью разложения по элементам 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -8 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} -8 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 6 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-5\cdot(9-10)+4\cdot(24-30)+6\cdot(-16+18)=-7$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 7 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=3\cdot(9-10)+4\cdot(-21+25)+6\cdot(14-15)=7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -8 & 7 & 5 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -5\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$=-5\cdot(-21+25)-3\cdot(24-30)+6\cdot(40-42)=-14$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -8 & -3 & 7 \\ 6 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -5\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=-5\cdot(15-14)+4\cdot(40-42)+3\cdot(-16+18)=-7$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{7}{-7}=-1\ ;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2\ ;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1$$

Ответ: $x=-1\ ;\ \ y=2\ ;\ \ z=1$.

Задание 3) Известны координаты (см. таблицу 1) в прямоугольной системе координат Oxy трех точек A, B, C, являющихся вершинами треугольника. Изобразить треугольник ABC в этой прямоугольной системе координат и найти:

3.1 координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их длины;

3.2 скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и угол Φ между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

3.3 векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и площадь треугольника ABC

3.4 значение параметра β, при котором векторы $\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ будут коллинеарны;

3.5 координаты точки P, делящей отрезок AB в отношении $\lambda=\frac{1}{2}$;

3.6 каноническое уравнение стороны AB;

3.7 уравнение с угловым коэффициентом и угловой коэффициент прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB.

Таблица 1

8	$A(4;-3)$	$B(7;3)$	$C(1;10)$

Решение:

3.1. найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их длины.

Координаты и длина $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A)=(7-4;\ 3-(-3))=(3;\ 6)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$$

Координаты и длина $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;\ y_C-y_A)=(1-4;\ 10-(-3))=(-3;\ 13)$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-3)^2+13^2}=\sqrt{178}$$

3.2 Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и угол ϕ между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3;\ 6)\cdot(-3;\ 13)=3\cdot(-3)+6\cdot13=69$$

$$Cos\,\phi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{69}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{178}}=0,771 \Rightarrow \phi=\arccos(0,771)\approx 39,6°.$$

3.3 найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и площадь треугольника ABC

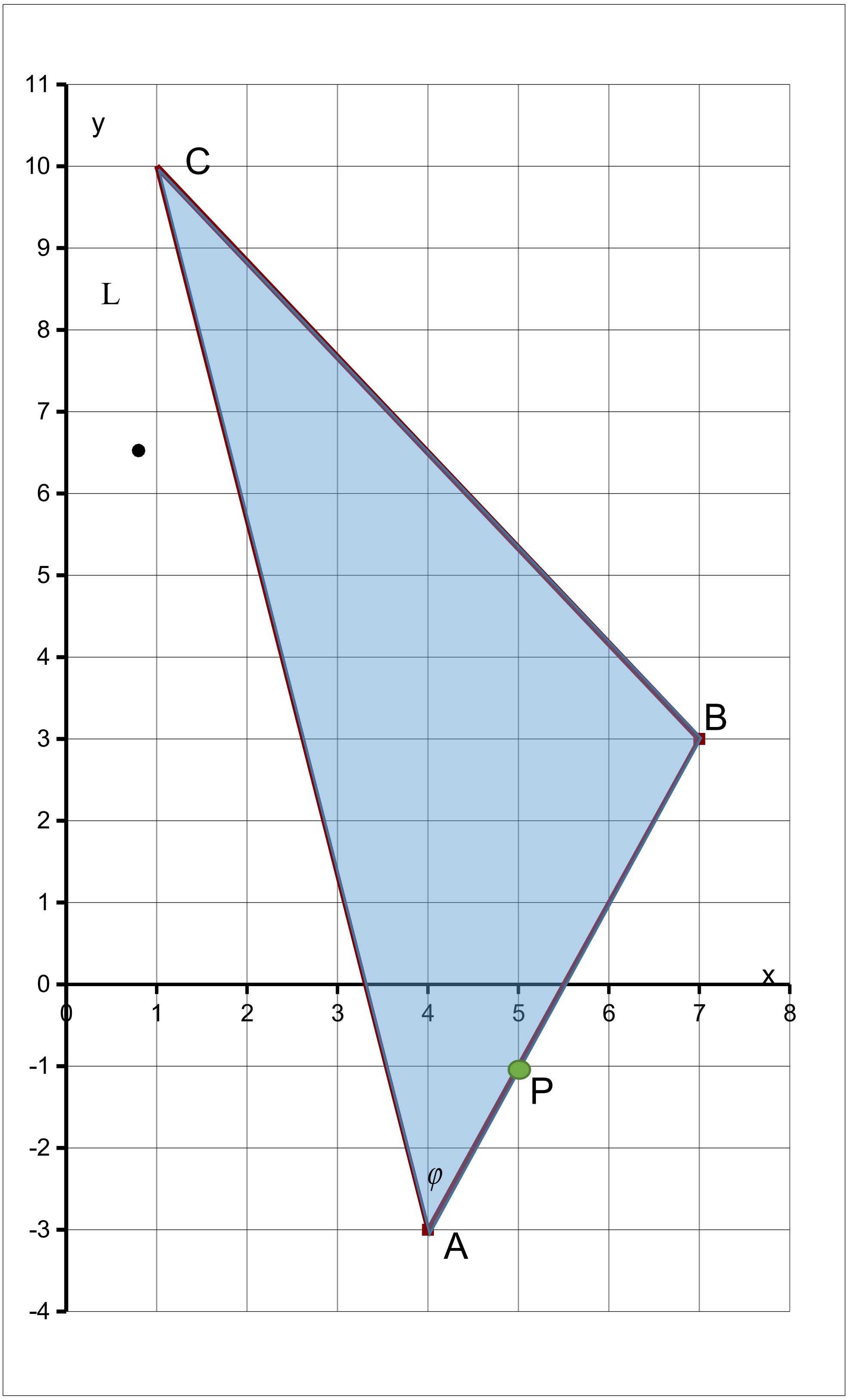
Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор **c**, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах **a** и **b**, перпендикулярный к плоскости этих векторов.

Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

Его площадь равняется половине площади параллелограмма, построенного на этих векторах, которая, в свою очередь равняется модулю векторного произведения этих векторов: $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\sqrt{45}\cdot\sqrt{178}\cdot\sin\left(\arccos 0,771\right)=57$$

Тогда площадь $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{57}{2}=28,5$.



3.4 найдем значение параметра β, при котором векторы $\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ будут коллинеарны.

$$\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}=(3;\ 6)+\beta\cdot(-3;\ 13)=(3-3\beta;\ 6+13\beta)$$

$\overrightarrow{BC}=\left(x_C-x_B;\ y_C-y_B\right)=(1-7;\ 10-3)=(-6;\ 7)$

Векторы будут коллинеарны, если их координаты пропорциональны:

$\frac{3-3\beta}{-6}=\frac{6+13\beta}{7} \Rightarrow 7\cdot(3-3\beta)=-6\cdot(6+13\beta)$

$$21-21\beta=-36-78\beta$$

$$57\beta=-57$$

$$\beta=-1.$$

3.5 найдем координаты точки P, делящей отрезок AB в отношении $\lambda=\frac{1}{2}$, если $A(4;-3)$, $B(7;3)$, т.е. $\lambda=\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{1}{2}$.

Координаты точки $P\left(x_P;y_P\right)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda=\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{1}{2}$, выражаются формулами: $x_P=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}$, $y_P=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}$, т.е.

$x_P=\frac{4+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=5$, $y_P=\frac{-3+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=-1 \Rightarrow P(5;-1)$.

3.6 найдем каноническое уравнение стороны AB.

$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-4}{7-4}=\frac{y-(-3)}{3-(-3)} \Rightarrow \frac{x-4}{3}=\frac{y+3}{6} \Rightarrow \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}$ - это каноническое уравнение.

3.7 найдем уравнение с угловым коэффициентом и угловой коэффициент прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB.

Сначала составим уравнение с угловым коэффициентом прямой *AB*, если каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-4}{3}=\frac{y+3}{6}$ $\Rightarrow$ $2(x-4)=(y+3)$ $\Rightarrow$ $2x-8=y+3$ $\Rightarrow$ уравнение с угловым коэффициентом: $y=2x-11$

Прямая *L*, параллельная прямой *AB*, имеет тот же угловой коэффициент, что и прямая *AB*, т.е. уравнение с угловым коэффициентом $y=2x+b$. Константу *b* находим из условия, что искомая сторона проходит через точку *C*(1; 10), т.е. при $x = 1$: $y = 10$. Подставляем эти координаты в уравнение:

$y=2x+b$ $\Rightarrow$ $10=2\cdot1+b$ $\Rightarrow$ $b=8$ $\Rightarrow$ $y=2x+8$.

Угловой коэффициент $k = 2$.

Задание 4) Известны координаты (см. таблицу 2) в прямоугольной системе координат $Oxyz$ вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4.

4.1 найти смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ и объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

4.2 найти каноническое уравнение прямой A_1A_2;

4.3 найти общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Таблица 2

8	$A_1(6;1;1)$	$A_2(4;6;6)$	$A_3(4;2;0)$	$A_4(1;2;6)$

Решение:

4.1. Координаты вектора A_1A_2:

$\overrightarrow{A_1A_2}=(4-6\,;6-1\,;6-1)=(-2\,;5\,;5)$.

Координаты вектора A_1A_3:

$\overrightarrow{A_1A_3}=(4-6\,;2-1\,;0-1)=(-2\,;1\,;-1)$.

Координаты вектора A_1A_4:

$\overrightarrow{A_1A_4} = (1-6\,;2-1\,;6-1) = (-5\,;1\,;5)$.

Объем пирамиды равняется 1/6 от объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, который, в свою очередь равняется модулю смешанного произведения этих трех векторов.

Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(5+1) - 5\cdot(-10-5) + 5\cdot(-2+5) = 78$$

То есть объем пирамиды : $V = \frac{78}{6} = 13$ (ед^3).

4.2 найдем каноническое уравнение прямой A_1A_2.

Уравнение прямой A_1A_2: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, где $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6) \Rightarrow$

$$\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-1}{6-1} = \frac{z-1}{6-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-6}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{5}.$$

4.3. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ 4-6 & 6-1 & 6-1 \\ 4-6 & 2-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-6)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-6)(-5-5) - (y-1)(2+10) + (z-1)(-2+10) = 0$$

Раскроем скобки:

$$-10(x-6) - 12(y-1) + 8(z-1) = 0$$

$$5(x-6)+6(y-1)-4(z-1)=0$$

$$5x+6y-4z-32=0.$$

Ответ:
$5x+6y-4z-32=0$

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Аналитическая геометрия, М., Наука, 1988.

2. Беклемишев Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М, Наука, 1984.

3. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Аналитическая геометрия, М., Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

4. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С., Сборник задач по аналитической геометрии, М., Наука, 1976.